№12-дәріс

Бірнеше айнымалылардың функциялары. Екі, үш айнымалының функциялары. КАФ анықтау аймағы. Функцияның шегі және үздіксіздігі. Бірнеше айнымалы функцияның экстремумы

Біз осыған дейін жоғарғы математика курсында бір нақты айнымалы $y = f(x)$ түріндегі нақты функцияларды ғана қарастырдық, яғни, анықталу облысы мен мәндерінің облысы қандай да бір сандық осьтің ішкі жиыны болатын функцияларды қарастырдық.

Бірақ та, практика жүзінде аргументі бір аргументтен де көп болатын функциялар кеңінен қолданылады, оның зерттеудің өзіндік ерекшеліктері бар. Көп айнымалы функцияларды дифференциалдау туралы сұрақтарды қарастыру кезінде жаңа ұғымдар пайда болады, біз $n=2$ жағдайын қарастырамыз, одан кейін оны $n \geq 3$ жағдайлары үшін де қолдана аламыз.

Анықтама 1. Екі (үш) айнымалы функциялар деп анықталу облысы D жазықтықтың (кеңістіктің) ішкі жиыны болатын, ал мәндерінің облысы E нақты сандар осінде жататын функцияларды айтамыз.

Егер D анықталу облысы Oxy жазықтығына тиісті болса, ал E мәндер облысы Oz осінде жататын болса, онда ондай екі айнымалы функциялар мына түрде жазылады

$$z = f(x, y).$$

Жазықтықтағы немесе кеңістіктегі облыстарға қатысты бірнеше анықтамалар енгізелік.

Анықтама 2. Жазықтықтағы радиусы r болатын $M(x_0, y_0)$ нүктесінің (немесе кеңістіктегі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінің) аймағы деп радиусы r, центрі M_0 нүктесі болатын шеңберсіз дөңгелекті (немесе сферасыз шарды) айтамыз.

Бұл аймақты $U_r(M_0)$ арқылы белгілейік.

Жазықтықта $U_r(M_0)$ аймағы төмендегі теңсіздікпен анықталады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

Ал кеңістікте – $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$.

Анықтама 3. M_0 нүктесі D жиынының *шекаралық нүктесі* деп аталады, егер осы нүктенің радиусы кез келген r болатын аймағы D жиынымен және оның толықтауышымен қиылысса.

D жиынының барлық шекаралық нүктелерінің жиыны осы жиынның шекарасы деп аталады және былай белгіленеді $\Gamma(D)$.

Анықтама 4. Барлық $\Gamma(D)$ шекараларын ұстайтын жиын *тұйық* жиын деп аталады**.** Өзінің шекарасының бірде-бір нүктесі жатпайтын D жиыны *ашық* жиын деп аталады.

Мысал 1. $U_r(M_0)$ аймағында өз шекарасының – шеңбердің (сфераның) бірде бір нүктесі жатпайтындықтан, $U_r(M_0)$ – ашық жиын.

Мысал 2. Жазықтықта

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$$

теңсіздігімен берілген дөңгелекке оның шекаралық нүктелері, яғни, төмендегі теңдеумен берілген

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

шеңбердің нүктелері тиісті, ендеше ол – тұйық жиын.

Мысал 3. Төмендегі теңсіздік жүйесімен анықталған

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ y>0 \end{cases}$$

жазықтықтың бір ширегіне Oy осінің шекаралық нүктелері тиісті, ал Ox осінің шекаралық нүктелері тиісті емес. Бұл жиын ашық та, тұйық та емес жиын.

Мысал 4. $z=\arccos\frac{x}{x+y}$ *функциясының анықталу облысын тап.*

Δ Бұл функция $\left|\frac{x}{x+y}\right|\le 1,\quad x+y\ne 0\quad y\ne -x$ болғанда анықталған, яғни, $|x|\le|x+y|,\quad y\ne -x$. Алдыңғы теңсіздіктің екі жағын да квадраттасақ $x^2\le x^2+2xy+y^2$, яғни, $2xy+y^2\ge 0$. Онда $\begin{cases} y(2x+y)\ge 0, \\ y\ne -x. \end{cases}$. Бұл жүйе орынды, егер келесі қатынастардың бірі орындалса $\begin{cases} y\ge 0, \\ 2x+y\ge 0 \\ y\ne -x. \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y\le 0, \\ 2x+y\le 0 \\ y\ne -x. \end{cases}$.

Сонымен, z функциясының анықталу облысы

$$D=\left\{(x,y)\in R_2:(x,y)\ne(0,0),\begin{cases} y\ge 0, \\ 2x+y\ge 0 \end{cases} \text{\textit{немесе}} \begin{cases} y\le 0, \\ 2x+y\le 0. \end{cases}\right\}.$$

Геометриялық тұрғыдан, берілген функцияның анықталу облысы D $y=0, y=-2x$ түзулерінен құралған екі доғал бұрыштан тұрады және (0,0) нүктесі бұл облысқа тиісті емес. Δ

Мысал 5. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ функциясының анықталу облысын тап, мұндағы R–оң сан.

Δ z функциясы $R^2-x^2-y^2\ge 0$, яғни, $x^2+y^2\le R^2$ болғанда ғана нақты мәндер қабылдайды. Ендеше, берілген функцияның анықталу облысы радиусы R центрі (0,0) нүктесі болатын дөңгелек, дөңгелектің шекаралық нүктелері анықталу облысына тиісті: $D=\{(x,y)\in R_2: x^2+y^2\le R^2\}$. Δ

Анықтама 5. $z = f(x,y)$ функциясының C *деңгейлік сызығы* дегеніміз D анықталу облысындағы $M(x,y)$ барлық нүктелер жиыны, координаталары төмендегі теңдікті қанағаттандыратын:

$$f(x,y) = C, \text{ мұндағы } C \text{ –тұрақты сан.}$$

Осындай әдіспен тең биіктікті сызықтар географиялық картаға бейнеленеді. Олар $z = h(x,y)$ функциясының координатасы (x,y) болатын жергілікті нүктенің биіктігін теңіздің деңгейімен анықтайтын сызықтың деңгейіне жатады.

Мысал 6. Берілген функцияның әртүрлі деңгейдегі сызықтарын тап

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Ондай сызықтар

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$$

теңдігімен анықталады.

Егер $C = 0$ болса, онда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$; $1 - x^2 - y^2 = 0$;

$$x^2 + y^2 = 1.$$

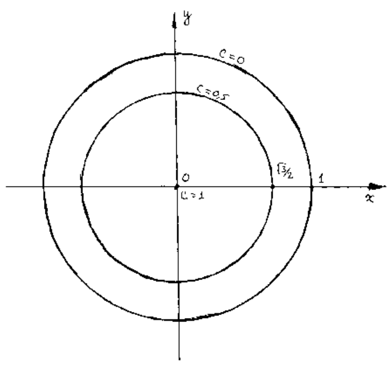
Сондықтан, 0-ші деңгейдегі сызық радиусы бірге, ал центрі координаталардың бас нүктесінде жататын шеңбер.

Егер $C = 1/2$ болса, онда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1/2$; $1 - x^2 - y^2 = 1/4$;

$$x^2 + y^2 = 3/4.$$

$C = 1/2$ деңгейдегі сызық радиусы $R = \sqrt{3}/2$, центрі координаталардың бас нүктесінде жататын шеңбер.

Егер $C = 1$ болса, онда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1$ теңдеуі координаталардың бас нүктесін $O(0,0)$ анықтайды (сурет 19).



Сурет 19

Егер $C > 1$ және $C < 0$ болса, онда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$ теңдеуінің шешімдері нақты сандар жиынында табылмайды, сондықтан берілген функцияның бұндай деңгейдегі сызықтары жоқ.

Үш айнымалы функцияның графигінің орнына келесі ұғымдарды қолдануға болады.

Анықтама 6. $u = f(x, y, z)$ функциясының C *деңгейлік беті* дегеніміз функцияның D анықталу облысындағы $M(x, y, z)$ барлық нүктелер жиыны, координаталары $f(x,y,z) = C$ теңдігін қанағаттандыратын.

Мысал 7. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциясын қарастыралық. Егер $C > 0$ болса, онда оның деңгейлік беттері радиустары $\sqrt{C}$, центрлер і координаталардың бас нүктесі болатын сфералар. Егер $C = 0$ болса, онда 0-ші деңгейлік бет координаталардың бас нүктесі. Ал $C < 0$ болғанда, бұл функцияның деңгейлік беттері табылмайды.

9.1.1 Көп айнымалы функцияның шектері мен үзіліссіздігі

Жоғарыда қарастырылған екі және үш айнымалы функциялар үшін енгізілген ұғымдарды n айнымалы функциялар үшін жалпылауға болады.

Анықтама 7. n айнымалы функция деп – анықталу облысы D R^n-да жататын, ал мәндер облысы нақты осьте жататын

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

функциясын айтамыз. Бұндай функция D-дан алынған әрбір $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ жиынтығына тек бір ғана y санын сәйкестікке қояды. Біз ары қарай анықтық үшін $n = 2$ айнымалы функцияларды қарастырамыз, бірақ бұл функцияға негізделген барлық тұжырымдар одан жоғарғы ретті айнымалы функциялар үшін де ақиқат болады.

Анықтама 8. A саны

$$z = f(x, y)$$

функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі деп аталады, егер әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылып, $U_\delta(x_0, y_0)$ аймағындағы барлық (x, y) үшін, осы нүктеден басқа нүктелерде, төмендегі теңсіздік орындалса

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі A болса, онда ол былай белгіленеді:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A .$$

Бұрын қарастырылған бір айнымалы функциялардың шектерінің барлық қасиеттері көп айнымалы функциялар үшін де орынды, бірақ біз практика жүзінде ондай шектерді табумен айналыспаймыз.

Анықтама 9. $z = f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер мынадай үш шарт орындалса:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ шегі табылса

2) (x_0, y_0) нүктесіндегі функцияның мәні табылса

3)бұл екі сан өзара тең болса, яғни, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Практика жүзінде функцияны үзіліссіздікке зерттеуде келесі теореманы қолданамыз.

Теорема 1. Кез келген $z = f(x,y)$ элементар функция өзінің анықталу облысының барлық ішкі нүктелерінде (яғни, шекаралық емес нүктелерде) үзіліссіз.

Мысал 8. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

функциясы үзіліссіз болатын барлық нүктелерді табалық.

Жоғарыда айтылып өткендей, бұл функцияның анықталу облысы – тұйық дөңгелек

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Бұл дөңгелектің шішкі нүктелері функцияның үзіліссіз болатын нүктелері, яғни $z = \sqrt{1 - x^2 = y^2}$ функциясы $x^2 + y^2 < 1$ ашық дөңгелегінде үзіліссіз.

Берілген функцияның D анықталу облысының шекаралық нүктелердегі үзіліссіздігінің анықтамасын енгізуге болады, бірақ біз курста бұл сұраққа тоқталмасақ та болады.